Итерациялық әдістер

Кіріспе

Осы уақытқа дейін біз шешудің тура әдістерін ғана талқыладық. Бұл әдістердің ортақ сипаттамасы – олар шешімді операциялардың шектеулі санымен есептейді. Оның үстіне, егер компьютер шексіз дәлдікке қабілетті болса (дөңгелектеу қателері жоқ), шешім дәл болар еді.

Итерациялық немесе жанама әдістер x шешімін бастапқы болжаудан бастайды, содан кейін x өзгерісі елеусіз болғанша шешімді қайта-қайта жақсартады. Итерациялардың қажетті саны үлкен болуы мүмкін болғандықтан, жанама әдістер, жалпы алғанда, тура әдіске қарағанда баяу жұмыс жасайды. Дегенмен, итерациялық әдістер оларды белгілі бір есептер үшін тартымды ететін келесі екі артықшылыққа ие:

1. Коэффиценттік матрицаның нөлден басқа элементтерін ғана сақтау мүмкін. Бұл өте үлкен матрицалармен жұмыс істеуге мүмкіндік береді. Көптеген есептерде коэффициент матрицасын мүлде сақтаудың қажеті жоқ.
2. Итерациялық процедуралар өздігінен түзетіледі, яғни бір итерациялық циклдегі дөңгелектеу қателері (тіпті арифметикалық қателер) келесі циклдарда түзетіледі.

Итерациялық әдістердің елеулі кемшілігі – олар әрқашан шешімге жақындай бермейді. Коэффицент матрицасы диагональ бойынша басым болған жағдайда ғана жинақталуға кепілдік берілетінін көрсетуге болады. x үшін бастапқы жуықтау жинақталудың орын алуын анықтауда ешқандай рөл атқармайды — егер процедура бір бастапқы вектор үшін жинақталса, ол кез келген бастапқы вектор үшін солай жасайды. Бастапқы болжам жинақталуға қажетті итерациялар санына ғана әсер етеді.

Гаусс-Зейдель әдісі

$A \cdot x = b$ теңдеулер жүйесі скалярлық белгілеуде

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Қосынды белгісінен x_i бар мүшені алу келесі нәтиже береді

$$A_{ii} x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1,2,\dots,n$$

x_i үшін шешеміз

$$x_i = \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_{ij} x_j \right), \qquad i = 1,2,\dots,n$$

Соңғы теңдеу келесі итерациялық сұлбаны ұсынады:

$$x_i \leftarrow \frac{1}{A_{ii}} \left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} A_{ij} x_j \right), \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1}$$

Біз x бастапқы векторын таңдаудан бастаймыз. Егер шешімнің жақсы болжамы болмаса, x кездейсоқ таңдалуы мүмкін. Содан кейін (1) теңдеу x-тің әрбір элементін қайта есептеу үшін пайдаланылады, әрқашан x_j -ң ең соңғы қол жетімді мәндерін пайдаланады. Бұл бір итерация циклін аяқтайды. Процедура тізбектес итерация циклдері арасындағы x өзгерістері жеткілікті түрде аз болғанша қайталанады.

Гаусс-Зайдель әдісінің жинақталуын релаксациямен жақсартуға болады. Негізгі идея x_i-ң жаңа мәнін оның алдыңғы мәні мен (1) теңдеу бойынша болжанған мәнінің орташа өлшенген мәні ретінде қабылдау болып табылады. Сәйкес итерациялық формула келесідей болып табылады

$$x_i \leftarrow \frac{\omega}{A_{ii}}\left(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} A_{ij}x_j\right) + (1-\omega)x_i, \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{2}$$

мұндағы ω салмақ релаксация коэффициенті деп аталады. Егер $\omega = 1$ болса, релаксация болмайтынын көруге болады, өйткені (1) мен (2) теңдеулер бірдей нәтиже береді. Егер $\omega < 1$ болса, (2) теңдеу ескі x_i мен (1) теңдеуде берілген мән арасындағы интерполяцияны көрсетеді. Бұл төменгі релаксация деп аталады. $\omega > 1$ болған жағдайда бізде экстраполяция немесе жоғары релаксация болады.

ω тиімді мәнін алдын ала анықтаудың практикалық әдісі жоқ; дегенмен, бағалауды орындау уақытында есептеуге болады. $\Delta x^{(k)} = \left|x^{(k-1)} - x^{(k)}\right|$ k-итерация кезіндегі x өзгерісінің шамасы болсын (релаксациясыз кезінде [яғни, ω = 1]). Егер k жеткілікті үлкен болса (айталық, $k \geq 5$), ω тиімді мәнінің жуықтауы болатынын көрсетуге болады

$$\omega_{opt} \approx \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \left(\Delta x^{(k+p)}/\Delta x^{(k)}\right)^{1/p}}} \tag{3}$$

мұндағы p – натурал сан.

Релаксациясы бар Гаусс-Зайдель алгоритмінің негізгі элементтері келесідей:

$\omega = 1$ болатын k итерацияны орындаймыз ($k = 10$ орынды). $\Delta x^{(k)}$ жазып аламыз. p итерация үшін қайта орындаймыз. $\Delta x^{(k+p)}$ жазып аламыз. (3) теңдеуінен ω_{opt} есептеңіз. Барлық келесі итерацияларды $\omega = \omega_{opt}$ арқылы орындаңыз.